数理解析研究所講究録
794巻 1992年 50-53

Prime graph components of finite groups

筑波大学 飯寄信保
Nobuo Iiyori
筑波大学 八牧宏美
Hiroyoshi Yamaki

有限群Gのprime graph $\Gamma(G)$とは、

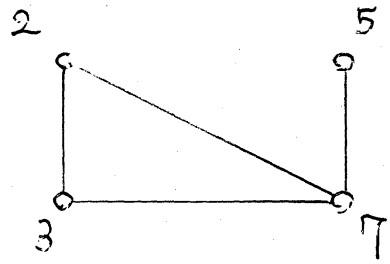
頂点集合 $V(\Gamma(G)) = \pi(G) = \{ p \mid p = \mathrm{prime},\ p \mid |G| \}$

辺集合 $E(\Gamma(G))$, $pq \in E(\Gamma(G)) \Leftrightarrow$

$\exists g \in G$, order $g = pq$, $p \neq q$

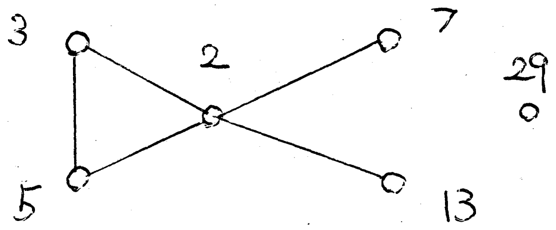
で定義されるgraphのことである。$\nu(G)$を$\Gamma(G)$の連結成分の個数とする。

例 $G = Z_7 \times S_5$ $G = Ru$ Rudvalis群



$\Gamma(Z_7 \times S_5)$

$\nu(Z_7 \times S_5) = 1$



$\Gamma(Ru)$

$\nu(Ru) = 2$

Prime graphは有限群論においていろいろと応用されてい

る。例えば Frobenius 予想(i.e. 有限群 G とその位数を割る自然数 e に対して群上の方程式 $x^e=1$ が丁度 e 個の解をもてば解集合は群となるであろうと云う予想)の検証にも有効に用いられている[I-Y, 1, 2, Y]。Thompson の予想[Sh]やいろいろな群の特徴づけ[B-Sh]にも応用されている。連結成分の個数 $\nu(G)$ に対してはいろいろな結果がある。π_1 は 2 を含む $\Gamma(G)$ の連結成分とする。

定理 1 (Gruenberg - Kegel)

$\nu(G)\geqslant 2$ となる有限群 G は次の構造をもつ。

(1) Frobenius 群 又は 2 - Frobenius 群.

(2) $G\rhd H\rhd K$ で K は π_1 群 H/K は単純群

G/H は π_1 群

但し 2 - Frobenius 群とは次の構造をもつ群 G のことである。

$1\subset H\subset K\subset G$, K は H を核とする Frobenius 群

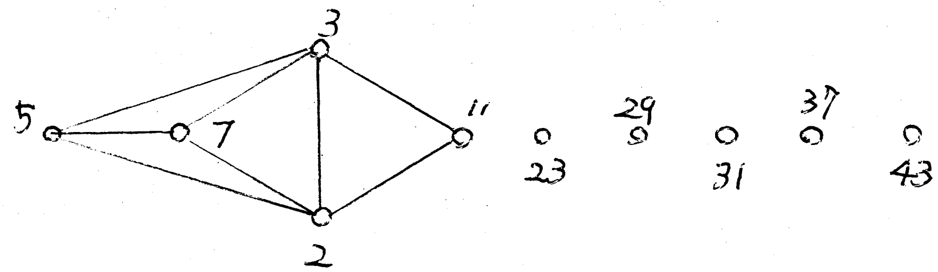
G/H は K/H を核とする Frobenius 群、なる部分群列をもつ。

定理 1 より $\nu(G)$ は単純群の分類に帰着される。従って[LW], [I-Y 3]の単純群 G についての $\nu(G)$ の分類を用いると、すべての有限群に対して成立する非常に一般的な結果が得られる。

定理 2

有限群 G に対して　$\nu(G) \leqq 6$.

例　$G = J_4$; 最大の Janko 群



$\Gamma(J_4)$,　　$\nu(J_4) = 6$.

注意　[W], [I-Y 3] では $\nu(G)$ ばかりでなく $\pi(G)$ の連結成分が完全に分類されている。

さて $\nu(G) \geqq 2$ となる群は表現論など他の言葉で言い換えることができる。

定理 3 ([I], [W])

(1), (2), (3) は同値である。

(1)　$\nu(G) \geqq 2$

(2)　G は 2-connected sharp character χ をもつ。すなわち　$\chi(G^{\#}) = \{p, q\}$, $(\chi(1) - p, \chi(1) - q) = 1$ かつ $|G| = (\chi(1) - p)(\chi(1) - q)$.

(3)　G は次の性質をもつ Hall 部分群 H を含む。

(i)　$C_G(x) \subseteq H$　　, $x \in H^{\#}$,

(ii)　$H \cap H^g = 1$ or H　, $g \in G$

References

[B-Sh] R. Brandl and W. Shi, Finite groups whose element orders are consecutive integers, J. Algebra 143 (1991), 388-400.

[I] N. Iiyori, Sharp characters and prime graphs of finite groups, To appear in J. Algebra.

[I-Y,1] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, Bull. Amer. Math. Soc. 25 (1991), 413-416.

[I-Y,2] ________, A conjecture of Frobenius and the simple groups of Lie type, III, J. Algebra 145 (1992), 329-332.

[I-Y,3] ________, Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, To appear in J. Algebra.

[Sh] W. Shi and J. Bi, A characteristic property for each finite projective special linear group, Lecture Notes in Mathematics, 1456 (1990), 171-180, Springer.

[W] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups, J. Algebra 69 (1981), 487-513.

[Y] H. Yamaki, A conjecture of Frobenius and the simple groups of Lie type, I. Arch. Math. 42 (1984), 344-347, II. J. Algebra 96 (1985), 391-396.